9. EGYOLDALÚ ÉRINTKEZÉSI FELADATOK VÉGESELEM MEGOLDÁSA

9.1. Az egyoldalú kontakt feladat

Érintkezési feladat: A vizsgált rendszer több testből / alkatrészből áll és ezek a testek terhelés hatására a felületük egy részén egymással érintkeznek.

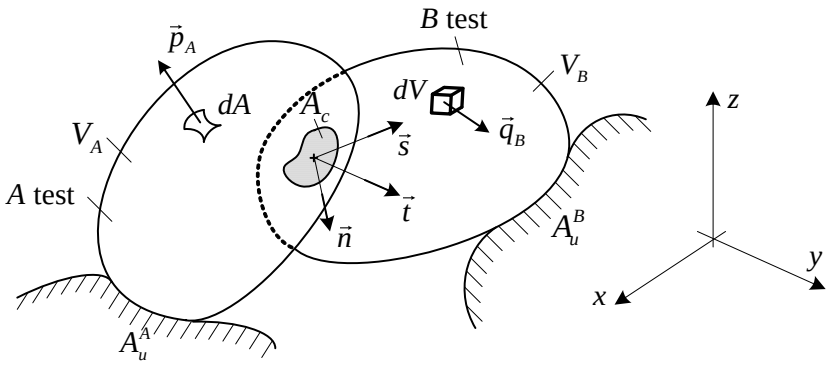
Egyoldalú érintkezési feladat: A terhelés hatására létrejött érintkezések a terhelés változásának hatására meg is szünhetnek, a már érintkező felületeken, vagy azok egy részén elválások is jöhetnek létre.

Súrlódásmentes érintkezési feladat: Az érintkező felületek simák.

Súrlódásos érintkezési feladat: Az érintkező felületek érdesek.

Gyakorlati példák:
- Lendítőkerekek, fogaskerekek, stb. tengelyre rögzítése (retesz, ék, zsugorkötés).
- Csavar – anya kapcsolat.
- Csőkötések (karimás, bilincses).
- Fogaskerék kapcsolat.
- Sikló és gördülő csapágyak.
- Henger – dugattyú kapcsolat.

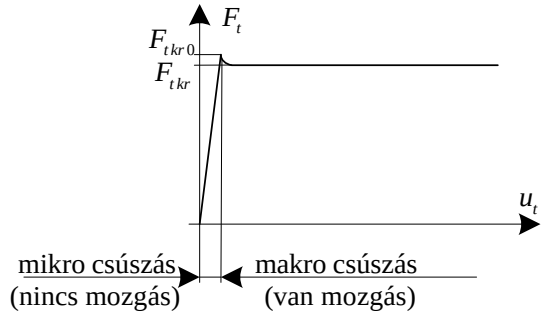
Az érintkezési feladat kitűzése:



Adott:
- Az A és a B jelű test alakja és méretei.
- A testek $\vec{p}_A, \vec{p}_B, \vec{q}_A, \vec{q}_B$ terhelései.
- A testek A_u^A, A_u^B megtámasztott felületei.

Keresett:
- Az A_c érintkezési / kontakt tartomány alakja és méretei.
- Az A_c érintkezési tartományon megoszló normálerő eloszlás (kontaktnyomás, érintkezési nyomás)
- Az A_c-n belüli A_c^T tapadási és az A_c^S csúszási tartomány alakja és méretei.
- Az A_c^T tapadási és az A_c^S csúszási tartományon a megoszló tangenciális erő eloszlás.
- Az A és a B jelű testben kialakuló elmozdulási, alakváltozási és feszültségi állapot.

Feltételezések:
- A dinamikai hatások és a testek (alkatrészek) közötti kenőanyag szerepe elhanyagolható.
- A testek anyaga lineárisan rugalmas.
- Terhelés hatására a testekben kis elmozdulások és kis alakváltozások jönnek létre.
- Az érintkezési felületen kialakuló viszonyok a *Coulomb*[1]-féle súrlódási törvénnyel írhatók le.



Tapasztalat:
- F_{tkr0} kritikus erőnél a test megmozdul.
- A mozgás $F_{tkr} < F_{tkr0}$ erővel is fenntartható.

Nyugvásbeli súrlódás: $F_t < F_{tkr0} = \mu_0 F_n$.

Mozgásbeli súrlódás: $F_t = F_{tkr} = \mu F_n$.

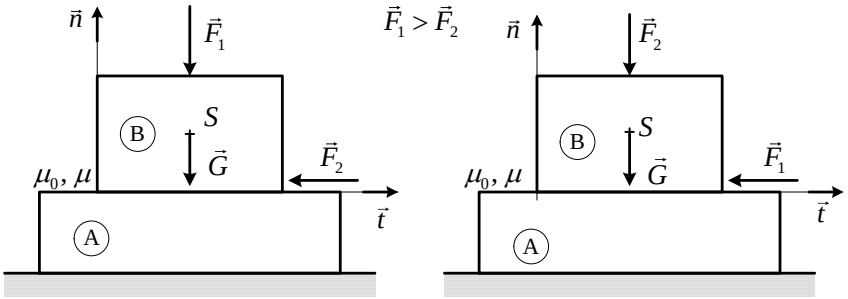
μ_0 - nyugvásbeli súrlódási tényező,

μ - mozgásbeli súrlódási tényező.

[1] Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) francia fizikus, hadmérnök.

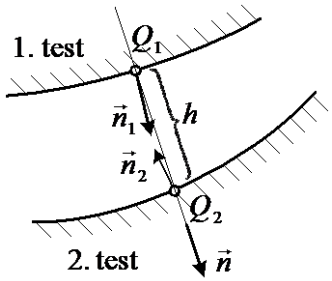
Az érintkezési feladat jellege:

- Nemlineáris: A terhelés és a feszültségek, a feszültségek és az elmozdulások, a terhelés és a kontakt tartomány nagysága között nem lineáris a függvénykapcsolat.
  Pl. kétszer akkora terheléshez nem kétszer akkora elmozdulások, feszültségek és kontakt tartomány tartozik.
- Nem konzervatív: A végső állapot függ a terhelés történetétől (A végső állapot „függ az úttól”.)
  Pl. A terhelés sorrendje befolyásolja a végső állapotot.



9.2. A súrlódásmentes kontakt feladat megoldása

Súrlódásmentes érintkezés: az érintkező felületek simák $\equiv$ ún. normálkontakt feladat.



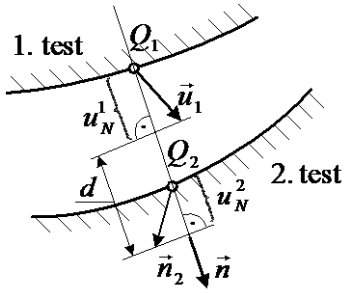
További feltételezések:

- Az érintkező felületek közel azonos geometriájúak.
- Az $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ felületi normálisok közel azonosak.

h - a kezdeti (terhelés előtti) hézag.

Q_1, Q_2 - a terhelés hatására érintkezésbe kerülő pontok.

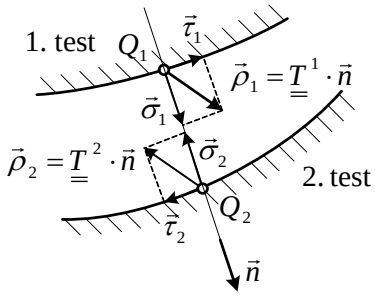
A testek terhelés hatására bekövetkező elmozdulásai:



Az alakváltozás utáni hézag: $d = d_N = u_N^2 + h - u_N^1$.

Ez a Q_1, Q_2 pontpár alakváltozás utáni távolságának az $\vec{n}$ normálisra eső vetülete.

Az érintkezés kinematikai feltétele: $d = 0$.

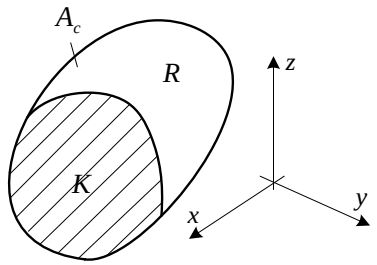


Az érintkezés dinamikai feltétele: $\left.\begin{array}{r} -p = \sigma^1 = \sigma^2 \le 0 \\ \cdots \vec{\tau}^1 + \vec{\tau}^2 = \vec{0} \end{array}\right\}$.

$p \ge 0$ - az érintkezési (kontakt) nyomás.

Normálkontakt feladat esetén nincs súrlódás: $\vec{\tau}^1 = \vec{\tau}^2 = \vec{0}$

A lehetséges és a tényleges kontakt tartomány:



A_c - a potenciális (lehetséges) érintkezési tartomány,

K - a tényleges érintkezési tartomány,

R - a rés tartomány.

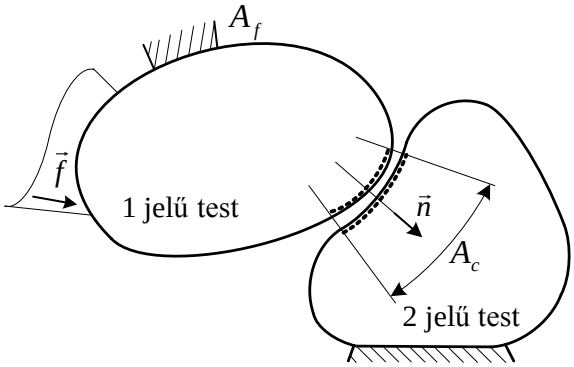
A potenciális kontakt tartományon az érintkezési feltétel egyenlőtlenségi-rendszerrel adható meg:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ha } d>0, \text{ akkor } p=0 \ \left(x\in R\right)\\ \text{Ha } d=0, \text{ akkor } p\geq 0 \ \left(x\in R\right)\end{array}\right\} \Rightarrow p\,d=0\,.$$

Probléma:

- Az A_c tartomány pontjai nem mozdulhatnak el tetszőlegesen, de „a priori" (előzetesen, előre) nem tudjuk megadni az elmozdulásokra vonatkozó előírást.
- Nem ismerjük a K tényleges kontakt tartomány alakját és méreteit sem.
- A K tényleges kontakt tartományon meg kellene adni a $p(x,y,z)\geq 0$ nyomáseloszlást, de a $p(x,y,z)$ sem ismert.

Megoldás:



Az 1 jelű testre vonatkozó megoldás előállításához meg kell akadályozni az 1 jelű test merevtestszerű mozgásait.

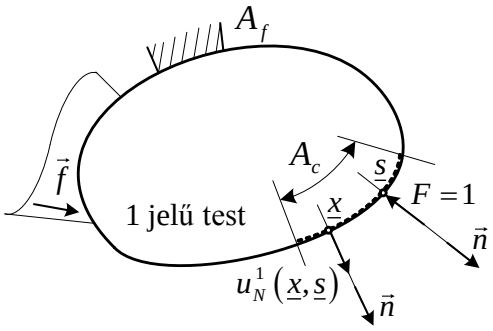
A merevtestszerű mozgások megakadályozására egy A_f fiktív támaszt alkalmazunk.

Az A_c potenciális kontaktfelület $\vec{n}$ normális egységvektorát úgy vesszük fel, hogy az az 1 jelű testből kifelé mutasson.

Feltételezzük, hogy az 1 jelű testre vonatkozó egzakt megoldást ismerjük – ez nagyon ritkán fordul elő.

Ha az 1 jelű testre vonatkozó egzakt megoldás nem ismert, akkor egy közelítő (pl. VEM) megoldást kell előállítani. Az A_f fiktív támaszt a VEM megoldáshoz szükséges számítási segédeszköz.

Az A_f fiktív támaszt az A_c lehetséges érintkezési felülettől távol kell felvenni, hogy ne okozzon zavarást az A_c környezetében (*Saint-Venant*[2]- elv).



Jelölés: $\underline{s}$ - egy adott pont helykoordinátái,

$\underline{x}$ - a futó pont helykoordinátái.

$$u_N^1(\underline{x},\underline{s})=\underbrace{H^1(\underline{x},\underline{s})}_{\text{hatásfüggvény}}$$

Ez az $\underline{s}$ helyen működő egységnyi normál irányú terheléshez tartozó (terhelésből származó) normál irányú elmozdulás az $\underline{x}$ helyen

Az 1 jelű testre vonatkozó megoldás ismeretére a $H^1(\underline{x},\underline{s})$ hatásfüggvény előállításához van szükség.

Az 1 jelű test potenciális kontaktfelületének normál irányú elmozdulása:

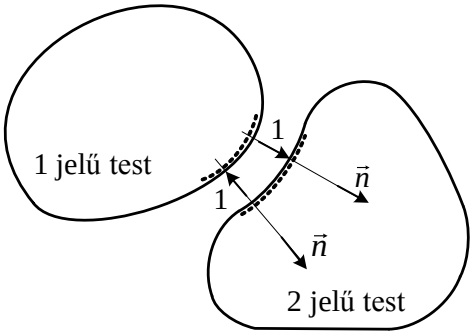
$$u_N^1(\underline{x})=\underbrace{-\int_{(A_c)} H^1(\underline{x},\underline{s})\,\overbrace{p(\underline{s})}^{\text{kontakt-nyomás}}\,dA}_{\text{a kontaktnyomás hatására létrejövő normál irányú elmozdulás}}+\overbrace{l(\underline{x})}^{\text{elmozdulás merevtestszerű mozgásból}}+\underbrace{f^1(\underline{x})}_{\text{az 1 jelű testre ható ismert külső erőkből származó normál irányú elmozdulás}}$$

[2] Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) francia mérnök és matematikus.

Az 2 jelű test potenciális kontaktfelületének normál irányú elmozdulása:

$$u_N^2(\underline{x}) = \underbrace{\int_{(A_c)} H^2(\underline{x},\underline{s})\,\overbrace{p(\underline{s})}^{\text{kontakt-nyomás}}\,dA}_{\substack{\text{a kontaktnyomás hatására}\\ \text{létrejövő normál irányú}\\ \text{elmozdulás}}} + \underbrace{f^2(\underline{x})}_{\substack{\text{a 2 jelű testre ható}\\ \text{ismert külső erőkből}\\ \text{származó normál irányú}\\ \text{elmozdulás}}}$$

A $H^2(\underline{x},\underline{s})$ hatásfüggvény előállításához ismerni kell a 2 jelű testre vonatkozó megoldást is.
Az integrálok előjelének magyarázata:

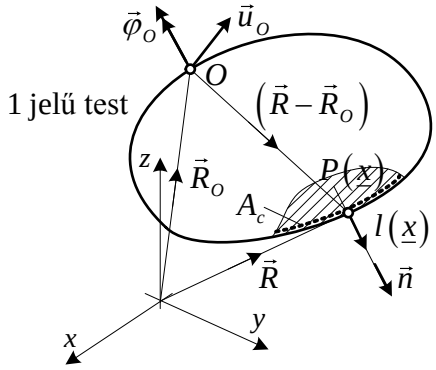


Az alakváltozás utáni hézag: $d(\underline{x}) = u_N^2(\underline{x}) - u_N^1(\underline{x}) + h(\underline{x})$

A normál elmozdulásokat behelyettesítve:

$$u_N^1(\underline{x}) = \int_{(A_c)} \underbrace{\left[H^1(\underline{x},\underline{s}) + H^2(\underline{x},\underline{s})\right]}_{H(\underline{x},\underline{s})} p(\underline{s})\,dA + \underbrace{\left[f^2(\underline{x}) - f^1(\underline{x}) - h(\underline{x})\right]}_{t(\underline{x})} - l(\underline{x})$$

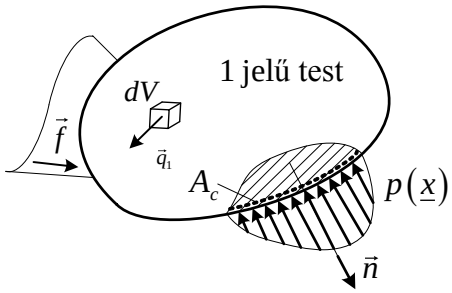
A merevtestszerű mozgásból származó normál elmozdulás az A_c érintkezési tartományon:



Az 1 jelű test merevtestszerű mozgását egy (pl. az O pont) pontjának $\vec{u}_O$ elmozdulásvektora és a merev test $\vec{\varphi}_O$ szögelfordulásvektora jellemzi.

$$l(\underline{x}) = \Big[\underbrace{\vec{u}_O + \vec{\varphi}_O}_{\substack{\text{6 db skaláris}\\ \text{ismeretlen}}} \times \left(\vec{R} - \vec{R}_O\right)\Big] \cdot \vec{n}$$

Egyensúlyi egyenletek: A testeknek külön-külön és együttesen is egyensúlyban kell lenniük.



Az 1 jelű testre felírt egyensúlyi egyenletekben a fiktív megtámasztásnál fellépő támasztóerőt már nem kell figyelembe venni.

Egyensúlyi egyenletek: $\vec{F}(O) = \vec{0}, \quad \vec{M}_O = \vec{0}$.

Részletesen kiírva:

$$\underbrace{\vec{F}_{Ok}}_{\substack{\text{adott külső}\\ \text{erők eredője}}} - \underbrace{\int_{(A_c)} p(\underline{x})\vec{n}(\underline{x})\,dA}_{\substack{\text{a kontaktnyomás}\\ \text{eredője}}} = \vec{0}$$

$$\underbrace{\vec{M}_{Ok}}_{\substack{\text{adott külső}\\ \text{erők nyomatéka}\\ \text{az } O \text{ pontra}}} - \underbrace{\int_{(A_c)} \left(\vec{R} - \vec{R}_O\right) \times p(\underline{x})\vec{n}(\underline{x})\,dA}_{\substack{\text{a kontaktnyomás}\\ \text{nyomatéka az } O \text{ pontra}}} = \vec{0}$$

A kitűzött feladatban szereplő ismeretlenek: $p(\underline{s}),\quad \vec{u}_O,\quad \vec{\varphi}_O$

<u>Feladat:</u> olyan megoldás keresése, amely kielégíti az alábbi feltételeket

$$\left.\begin{array}{l} d(\underline{x})=0,\ p(\underline{x})>0\ \ (\underline{x}\in K) \\ d(\underline{x})>0,\ p(\underline{x})=0\ \ (\underline{x}\in R) \end{array}\right\}\ p(\underline{x})d(\underline{x})=0\ \ (\underline{x}\in A_c)$$

$$\vec{F}(O)=\vec{0},\quad \vec{M}_O=\vec{0}.$$

A feladat matematikai megfogalmazása: $\min\left\{\underbrace{p(\underline{x})d(\underline{x})}_{\text{célfüggvény}}\ \middle|\ \text{ha}\ \underbrace{p(\underline{x})\geq 0,\ d(\underline{x})\geq 0,\ \vec{F}(O)=\vec{0},\ \vec{M}_O=\vec{0}}_{\text{mellékfeltételek}}\right\}.$

Ez egy szélsőérték számítási feladat.

A feladat végeselem megoldása:

<u>Diszkretizáció:</u> az A_c potenciális kontakt tartományt elemekre (résztartományokra) bontom és a kontaktnyomásra elemenként veszek fel közelítő függvényeket.

A kontaktnyomás közelítése: $p(\underline{x})=\sum_{i=1}^{N}P_i(\underline{x})\,p_i=\underline{\underline{P}}^T(\underline{x})\,\underline{\underline{p}}$, ahol

$\underline{\underline{P}}^T(\underline{x})=\left[P_1(\underline{x})\ P_2(\underline{x})\ \cdots\ P_i(\underline{x})\ \cdots\ P_N(\underline{x})\right]$ - az approximációs mátrix,

$\underline{\underline{p}}^T=\left[p_1\ p_2\ \cdots\ p_i\ \cdots\ p_N\right]$ - a csomóponti kontaktnyomások mátrixa,

N – az A_c -n felvett csomópontok száma.

A kontaktnyomást közelítő függvényt behelyettesítve az alakváltozás utáni hézag kifejezésébe:

$$d(\underline{x})=u_N^2(\underline{x})-u_N^1(\underline{x})+h(\underline{x})=$$

$$=\underbrace{\int_{(A_c)}H(\underline{x},\underline{s})\underline{\underline{P}}^T(\underline{s})dA}_{(1\times\mathrm{N})}\ \underbrace{\underline{\underline{p}}}_{(1\times\mathrm{N})}+\left[f^2(\underline{x})-f^1(\underline{x})+h(\underline{x})\right]-l(\underline{x}).$$

A merevtestszerű mozgást tartalmazó tag átalakítása:

$$l(\underline{x})=\vec{n}\cdot\left[\vec{u}_O+\vec{\varphi}_O\times\left(\vec{R}-\vec{R}_O\right)\right]=\left[n_x\ \ n_y\ \ n_z\right]\left\{\begin{bmatrix}u_{Ox}\\ u_{Oy}\\ u_{Oz}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -\Delta Z & \Delta Y\\ \Delta Z & 0 & -\Delta X\\ -\Delta Y & \Delta X & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_{Ox}\\ \varphi_{Oy}\\ \varphi_{Oz}\end{bmatrix}\right\}=\left[n_x\ \ n_y\ \ n_z\right]\left[\underline{\underline{I}}\ \ \vdots\ \ \underline{\underline{\Omega}}^T\right]\begin{bmatrix}\underline{\underline{u}}_O\\ \cdots\\ \underline{\underline{\varphi}}_O\end{bmatrix},$$

ahol $\left[\underline{\underline{I}}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ az egységmátrix, $\left[\underline{\underline{\Omega}}^T\right]=\begin{bmatrix}0 & -\Delta Z & \Delta Y\\ \Delta Z & 0 & -\Delta X\\ -\Delta Y & \Delta X & 0\end{bmatrix}$ a forgató mátrix.

Az érintkezési feltétel: $p(\underline{x})d(\underline{x})=0\quad\Rightarrow\quad\int_{(A_c)}p(\underline{x})d(\underline{x})dA=0$.

Az érintkezési feltételbe behelyettesítve a $p(\underline{x})$-re felírt közelítést:

$$\int_{(A_c)}p(\underline{x})d(\underline{x})dA=\underline{\underline{p}}^T\underbrace{\int_{(A_c)}\underline{\underline{P}}(\underline{x})\left[\int_{(A_c')}H(\underline{x},\underline{s})\underline{\underline{P}}^T(\underline{s})\,dA'\right]dA}_{\underline{\underline{H}}}\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{p}}^T\underbrace{\int_{(A_c)}\underline{\underline{P}}(\underline{x})\left[f^2(\underline{x})-f^1(\underline{x})+h(\underline{x})\right]dA}_{\underline{\underline{t}}}-$$

$$-\underline{\underline{p}}^T\underbrace{\int_{(A_c)}\underline{\underline{P}}(\underline{x})\left[n_x\ \ n_y\ \ n_z\right]\left[\underline{\underline{I}}\ \ \vdots\ \ \underline{\underline{\Omega}}^T\right]dA}_{\underline{\underline{G}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{\underline{u}}_O\\ \cdots\\ \underline{\underline{\varphi}}_O\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{c}}_0}=0$$

A bevezetett jelölésekkel az előző összefüggés (a célfüggvény / kontaktfeltétel diszkretizált alakja):

$$\int_{(A_c)} p(\underline{x})\, d(\underline{x})\, dA = \underline{\underline{p}}^T \left[\underbrace{\underline{\underline{H}}}_{\substack{\text{hatás-}\\\text{mátrix}}} \underline{\underline{p}} + \underbrace{\underline{\underline{t}}}_{\substack{\text{terhelési-}\\\text{vektor}}} - \underbrace{\underline{\underline{G}}}_{\substack{\text{geometriai-}\\\text{mátrix}}} \right] = \underbrace{\underline{\underline{p}}^T}_{\substack{\text{csomóponti}\\\text{kontaktnyomás}\\\text{vektor}}} \underbrace{\underline{\underline{d}}}_{\substack{\text{alakváltozás utáni}\\\text{csomóponti}\\\text{hézagvektor}}} = 0$$

Egyensúlyi egyenletek diszkretizálása az 1 jelű testre:

$$\vec{F}(O) = \underbrace{\vec{F}_O}_{\substack{\text{adott külső}\\\text{erők eredője}}} - \underbrace{\int_{(A_c)} p(\underline{x})\vec{n}(\underline{x})\, dA}_{\substack{\text{a kontaktnyomás}\\\text{eredője}}} = \begin{bmatrix} F_{Ox} \\ F_{Oy} \\ F_{Oz} \end{bmatrix} - \int_{(A_c)} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \underline{\underline{P}}^T(\underline{x})\, dA \underbrace{\underline{\underline{p}}}_{\substack{\text{csomóponti}\\\text{kontaktnyomás}\\\text{vektor}}} = \vec{0},$$

$$\vec{M}_O = \underbrace{\vec{M}_O}_{\substack{\text{adott külső}\\\text{erők nyomatéka}\\\text{az } O \text{ pontra}}} - \underbrace{\int_{(A_c)} \left(\vec{R} - \vec{R}_O\right) \times p(\underline{x})\vec{n}(\underline{x})\, dA}_{\substack{\text{a kontaktnyomás}\\\text{nyomatéka az } O \text{ pontra}}} = \begin{bmatrix} M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{bmatrix} - \int_{(A_c)} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z & \Delta Y \\ \Delta Z & 0 & -\Delta X \\ -\Delta Y & \Delta X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \underline{\underline{P}}^T(\underline{x})\, dA \underbrace{\underline{\underline{p}}}_{\substack{\text{csomóponti}\\\text{kontaktnyomás}\\\text{vektor}}} = \vec{0}.$$

Az egyensúlyi egyenletek egy mátrixegyenletbe összefoglalva:

$$\underbrace{\int_{(A_c)} \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} \\ \cdots \\ \underline{\underline{\Omega}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \underline{\underline{P}}^T(\underline{x})\, dA}_{\underline{\underline{G}}^T} \underline{\underline{p}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} \\ \cdots \\ \underline{\underline{\Omega}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}_0} = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{p}} - \underline{\underline{q}}_0 = \underline{\underline{0}}.$$

A normálkontakt feladat megfogalmazása a diszkretizáció után:

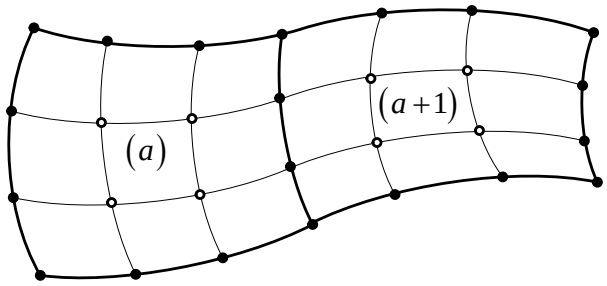
$$\min \left\{ \underbrace{\underline{\underline{p}}^T \underbrace{\left(\underline{\underline{H}}\, \underline{\underline{p}} + \underline{\underline{t}} - \underline{\underline{G}}\, \underline{\underline{c}}_0 \right)}_{\underline{\underline{d}}}}_{\text{célfüggvény}} \;\middle|\; \text{ha } \underbrace{\underline{\underline{p}} \geq 0,\ \underline{\underline{d}} \geq 0,\ \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{p}} - \underline{\underline{q}}_0 = \underline{\underline{0}}}_{\text{mellékfeltételek}} \right\}$$

Ez egy kvadratikus programozási feladat: a célfüggvény másodfokú (kvadratikus), a mellékfeltételek lineárisak.

Optimálási eljárások: (gazdasági matematika)
- Lineáris programozási feladat.
- Kvadratikus programozási feladat.
- Más szélsőérték / optimum keresési feladatok

9.3. Alszerkezet technika, szuperelem technika

Alszerkezet / szuperelem: A végeselemek egy meghatározott / kijelölt csoportja, amit a továbbiakban egy „nagy” végeselemnek, szuperelemnek, alszerkezetnek tekintünk.



$\left.\begin{matrix}(a)\\(a+1)\end{matrix}\right\}$ az egyes alszerkezetek jelölése

A csomópontokat két csoportba soroljuk / osztjuk:

• - külső csomópont / főszerkezeti csomópont (az egyes alszerkezetek / szuperelemek határfelületén),

∘ - belső csomópont / alszerkezeti csomópont (az egyes alszerkezetek / szuperelemek belsejében).

Az (a) jelű alszerkezet / szuperelem potenciális energiája:

$$\pi^a = \frac{1}{2}\left[\left(\underline{\underline{q}}_k^a\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_b^a\right)^T\right]\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{kk}^a & \underline{\underline{K}}_{kb}^a \\ \underline{\underline{K}}_{bk}^a & \underline{\underline{K}}_{bb}^a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_k^a \\ \underline{\underline{q}}_b^a \end{bmatrix} - \left[\left(\underline{\underline{q}}_k^a\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_b^a\right)^T\right]\begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_k^a \\ \underline{\underline{f}}_b^a \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}_k^a\right)^T \underline{\underline{K}}_{kk}^a \underline{\underline{q}}_k^a + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}_b^a\right)^T \underline{\underline{K}}_{bb}^a \underline{\underline{q}}_b^a + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}_k^a\right)^T \underline{\underline{K}}_{kb}^a \underline{\underline{q}}_b^a + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}_b^a\right)^T \underline{\underline{K}}_{bk}^a \underline{\underline{q}}_k^a - \left(\underline{\underline{q}}_k^a\right)^T \underline{\underline{f}}_k^a - \left(\underline{\underline{q}}_b^a\right)^T \underline{\underline{f}}_b^a .$$

$\underline{\underline{q}}_k^a$, $\underline{\underline{f}}_k^a$ - az (a) jelű alszerkezeten levő külső csomópontok elmozdulásvektora, illetve csp. tehelésvektora,

$\underline{\underline{q}}_b^a$ $\underline{\underline{f}}_b^a$ - az (a) jelű alszerkezeten levő belső csomópontok elmozdulásvektora, illetve csp. terhelésvektora.

Az egész szerkezet potenciális energiája: az összegzésnél csak az alszerkezetek összekapcsolását biztosító külső csomópontokban kell az elmozdulások összeillesztését elvégezni.

$\pi = \sum_{a=1}^{M} \pi^a$, ahol M az alszerkezetek száma.

A teljes potenciális energia minimuma elv szerint szélsőértéket keresünk:

$$\min \pi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial \underline{\underline{q}}_k} = \underline{\underline{0}}, \\[2ex] \dfrac{\partial \pi}{\partial \underline{\underline{q}}_b^a} = \dfrac{\partial\left(\sum_{a=1}^{M} \pi^a\right)}{\partial \underline{\underline{q}}_b^a} = \dfrac{\partial \pi^a}{\partial \underline{\underline{q}}_b^a} = \underline{\underline{0}}. \end{cases}$$

A $\underline{\underline{q}}_b^a$ csomóponti elmozdulások csak az (a) jelű alszerkezetnél fordul elő $\Rightarrow$ a szélsőérték előállítása alszerkezetenként végezhető el:

$$\frac{\partial \pi^a}{\partial \underline{\underline{q}}_b^a} = \underline{\underline{K}}_{bb}^a \underline{\underline{q}}_b^a + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}_k^a\right)^T \underline{\underline{K}}_{kb}^a + \frac{1}{2}\underline{\underline{K}}_{kb}^a \underline{\underline{q}}_k^a}_{\underline{\underline{K}}_{kb}^a \underline{\underline{q}}_k^a} - \underline{\underline{f}}_b^a = \underline{\underline{0}}, \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{q}}_b^a = -\left(\underline{\underline{K}}_{bb}^a\right)^{-1} \underline{\underline{K}}_{kb}^a \underline{\underline{q}}_k^a + \left(\underline{\underline{K}}_{bb}^a\right)^{-1} \underline{\underline{f}}_b^a$$

Az (a) jelű alszerkezet belső elmozdulásai az alszerkezet szintjén kifejezhetők az (a) jelű alszerkezet külső csomópontjainak elmozdulásaival.

Visszahelyettesítve az (a) jelű alszerkezet teljes potenciális energiájába: $\pi^e = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}_k^a\right)^T \underline{\underline{K}}_{red}^a \underline{\underline{q}}_k^a - \left(\underline{\underline{q}}_k^a\right)^T \underline{\underline{f}}_b^a$.

Az alszerkezet redukált (kondenzált) merevségi mátrixa: $\underline{\underline{K}}_{red}^a = \left(\underline{\underline{K}}_{kk}^a\right) - \underline{\underline{K}}_{kb}^a \left(\underline{\underline{K}}_{bb}^a\right)^{-1} \underline{\underline{K}}_{bk}^a$

Az alszerkezet redukált (kondenzált) csp. terhelési vektora: $\underline{\underline{f}}_{red}^a = \underline{\underline{f}}_k^a - \underline{\underline{K}}_{kb}^a \left(\underline{\underline{K}}_{bb}^a\right)^{-1} \underline{\underline{f}}_b^a$.

Redukció / kondenzáció (sűrítés): Az alszerkezet szabadságfokát a belső csomópontok szabadságfokával csökkentjük.

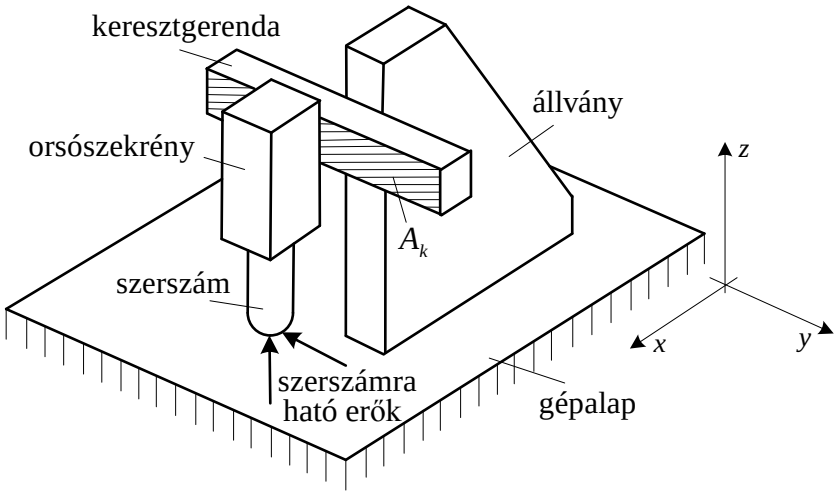
A redukció / kondenzáció előnyösen alkalmazható:

- Olyan bonyolult szerkezeteknél, ahol nagyon nagy szabadságfokú / ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert kell megoldani. Itt az alszerkezet technika több, kevesebb ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer megoldására vezeti vissza a megoldást.
- Olyan bonyolult szerkezeteknél, ahol egy szerkezeti elem többször is előfordul.
- Olyan bonyolult szerkezeteknél, ahol a szerkezet több egymáshoz közeli helyzetét, állapotát is meg kell vizsgálni.
- Olyan bonyolult szerkezeteknél, ahol egyes részekre ismétlődő számításokat kell elvégezni.

Példa: az alszekezet technika alkalmazására – szerszámgép végeselem analízise.

Szerszámgépeket elmozdulásra / merevségre szokás méretezni.

Feladat: a szerszámgép megmunkálási pontosságának tisztázása.



Az orsószekrény és vele együtt a szerszám a keresztgerenda mentén vízszintes haladó mozgást végez.

A megmunkálás pontossága a szerszám helyzetétől függően változik még akkor is, ha azt tételezzük fel, hogy a szerszámra ható erők állandóak.

Ezért a feladatot az orsószekrény / szerszám különböző helyzetére kell megoldani!

1. alszerkezet: gépalap + állvány + keresztgerenda.
2. alszerkezet: orsószekrény + szerszám.

Főszerkezeti csomópontok:
- A terhelés helyén levők.
- A megtámasztás helyén levők.
- A keresztgerenda orsószekrényhez kapcsolódó egész A_k felületén levők.
- Az orsószekrénynek a keresztgerendához kapcsolódó felületén levők.

Alszerkezeti csomópontok: Az összes többi csomópont.

Az alszerkezetek / szuperelemek merevségi mátrixa és csomóponti terhelésvektora független attól, hogy az alszerkezetek hol kapcsolódnak egymáshoz.

Az orsószekrény különböző helyzetei a végeselem számítások szempontjából abban különbözik egymástól, hogy az alszerkezetek mely csomópontokban kapcsolódik egymáshoz.

Előny:
- Az alszerkezetek jellemzőit nem kell minden helyzetben újraszámítani.
- A szerkezet merevségét főszerkezeti csomópontok elmozdulásaiból meg lehet határozni. A szerkezet merevségét a szerszámnak a terhelés hatására bekövetkező elmozdulása jellemzi (a gépalaphoz képesti elmozdulás)

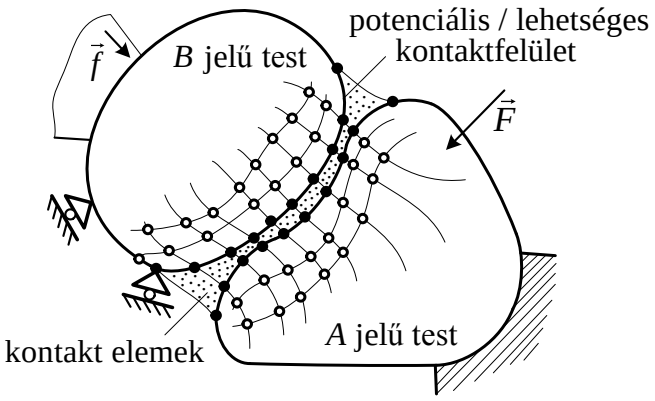
9.4. Súrlódásos kontakt feladat megoldása iterációval

Az alszerkezet technika az egyoldalú, súrlódásos kontakt / érintkezési feladat megoldásánál is előnyösen alkalmazható.

Egyoldalú kontakt: A terhelés során érintkezésbe kerülő felületeken nem léphet fel „egymásba hatolás”, de az érintkező felületek elválhatnak egymástól.

Súrlódásos kontakt: A terhelés hatására érintkezésbe kerülő felületek érdesek, az érintkező felületen valamilyen súrlódási törvénynek (legtöbbször a *Coulomb*-féle súrlódási törvénynek) megfelelő tangenciális / érintő irányú erők is lépnek fel.

Súrlódásmentes / normál kontakt: Az érintkező felületeket tökéletesen simának tételezzük fel, ezért rajtuk csak normális irányú erők lépnek fel, sima felületen tangenciális erők nem lépnek fel.



Főszerkezeti csomópontok: a lehetséges kontakttartományon levő pontok (a kontaktelemeken levő csomópontok)

Jelük: ●

Alszerkezeti csomópontok: az *A* és *B* jelű testen levő többi csomópont

Jelük: ○

Kontakt elemek: nem valóságos végeselemek, az érintkezési feltételek kielégülését biztosítják (matematikai / számítástechnikai segédeszközök).

A két (érintkező) testből álló rendszer végeselem alapegyenlete:

$$\left(\underline{\underline{K}}_{AB} + \underline{\underline{K}}_{c}\right)\Delta\underline{\underline{q}}^{i} = \Delta\underline{\underline{f}}^{i}.$$

$\underline{\underline{K}}_{AB}$ - az *A* és *B* test főszerkezeti csomópontokba redukált merevségi mátrixa,

$\underline{\underline{K}}_{c}$ - a kontaktelemek (főszerkezeti csomópontokba redukált) merevségi mátrixa,

$\Delta\underline{\underline{f}}^{i}$ - az *i*-dik terhelésnövekmény főszerkezeti csomópontokba redukált csomóponti terhelésvektora,

$\Delta\underline{\underline{q}}^{i}$ - a főszerkezeti csomópontok *i*-dik elmozdulásnövekménye.

A kontaktfeltételek (normálkontakt, tangenciális kontakt) teljesülését *iteratív úton* biztosítjuk:

1. iterációs lépés:

- A $\underline{\underline{K}}_{c0}$ értékét önkényesen felveszem: feltételezem, hogy az egész potenciális kontakt tartományon érintkezés (normálkontakt) és tapadás (tangenciális kontakt) van.
- Megoldom a végeselem alapegyenletet az első $\Delta\underline{\underline{f}}^{i}$ tehernövekményre:

  $$\left(\underline{\underline{K}}_{AB} + \underline{\underline{K}}_{c0}\right)\Delta\underline{\underline{q}}_{0}^{i} = \Delta\underline{\underline{f}}^{i} \quad \Rightarrow \quad \Delta\underline{\underline{q}}_{0}^{i} = \ldots$$

- A $\Delta\underline{\underline{q}}_{0}^{i}$ ismeretében ellenőrzőm az érintkezési (normálkontakt) és a súrlódási (tangenciális kontakt) feltételek teljesülését.
- Azoknál a kontaktelemeknél, ahol a feltételek nem teljesülnek, ott $\underline{\underline{K}}_{c1}$ értékkel módosítani kell a kontaktelemek normál, illetve tangenciális merevségét.

2. iterációs lépés:

- Megoldom a végeselem alapegyenletet továbbra is az első tehernövekményre:

  $$\left(\underline{\underline{K}}_{AB} + \underline{\underline{K}}_{c0} + \underline{\underline{K}}_{c0}\right)\Delta\underline{\underline{q}}_{1}^{i} = \Delta\underline{\underline{f}}^{i} \quad \Rightarrow \quad \Delta\underline{\underline{q}}_{1}^{i} = \ldots$$

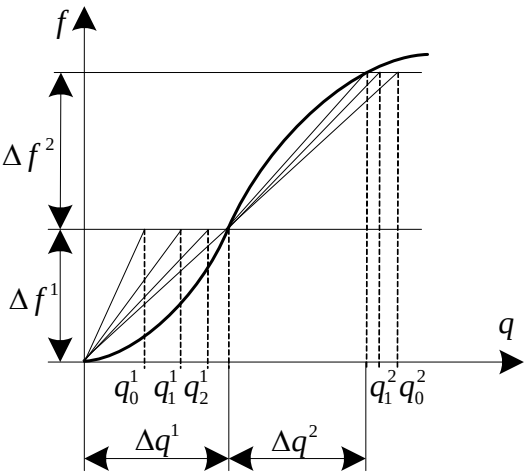
- A $\Delta\underline{\underline{q}}_{1}^{i}$ ismeretében ellenőrzőm az érintkezési (normálkontakt) és a súrlódási (tangenciális kontakt) feltételek teljesülését.
- Azoknál a kontaktelemeknél, ahol a feltételek nem teljesülnek, ott $\underline{\underline{K}}_{c2}$ értékkel módosítani kell a kontaktelemek normál, illetve tangenciális merevségét.

Ezt az iterációt addig ismétlem, amíg, amíg az egész potenciális kontakt tartományon az érintkezési és súrlódási feltételek nem teljesülnek.

Ezután megnövelem a terhelést: $\Delta \underline{\underline{f}}^{(i+1)}$.

A fenti (kontakt)iterációt elvégzem az $\Delta \underline{\underline{f}}^{(i+1)}$ terhelésnövekményre is, majd növelem a terhelést: $\Delta \underline{\underline{f}}^{(i+2)}$, és így tovább …

Az iteráció szemléltetése:



Az alszerkezet technika alkalmazása a kontakt-iterációnál:

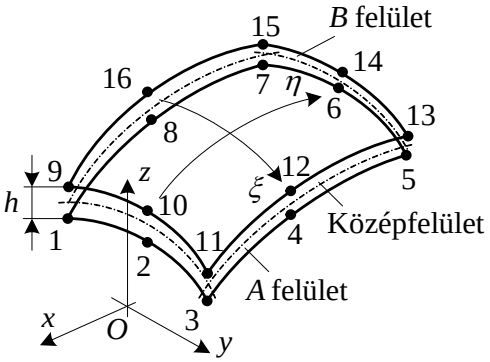
- Az iterációt csak a főszerkezeti csomópontok terheléseivel és elmozdulásival végzem.
- Az alszerkezet technika az iterációs lépésenként megoldandó egyenletrendszer szabadságfokát / méretét nagymértékben csökkenti.

9.5. Izoparametrikus kontakt elemek

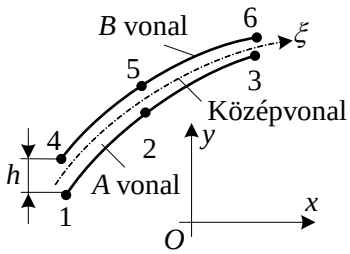
Kontaktelem: nem valóságos (képzelt, fiktív) elem, amely az érintkező felületeken az érintkezési és a súrlódási viszonyokat szimulálja, hatásukat leírja.

a) A kontaktelem jellemzői:

Felület kontaktelem
térbeli / 3D feladatokhoz



Vonal kontaktelem
SA, ÁSF, FSZ feladatokhoz

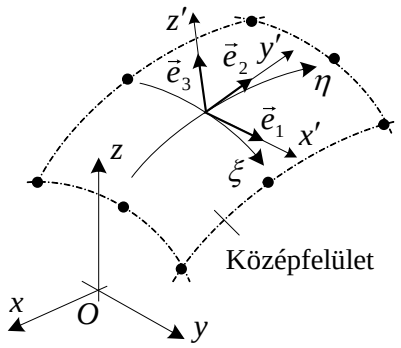


A geometria (az *A* és *B* felületek) leírása:

$$\vec{r}_A(\xi,\eta) = x_A(\xi,\eta)\vec{e}_x + y_A(\xi,\eta)\vec{e}_y + z_A(\xi,\eta)\vec{e}_z, \qquad \vec{r}_B(\xi,\eta) = x_B(\xi,\eta)\vec{e}_x + y_B(\xi,\eta)\vec{e}_y + z_B(\xi,\eta)\vec{e}_z,$$

$$\left.\begin{aligned} x_A(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{N} h_i(\xi,\eta)\, x_i \\ y_A(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{N} h_i(\xi,\eta)\, y_i \\ z_A(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{N} h_i(\xi,\eta)\, z_i \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_B(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{N} h_i(\xi,\eta)\, x_{i+N} \\ y_B(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{N} h_i(\xi,\eta)\, y_{i+N} \\ z_B(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{N} h_i(\xi,\eta)\, z_{i+N} \end{aligned}\right\}$$

N – az egyes felületeken levő csomópontok száma,
$h_i(\xi,\eta)$ - a síkbeli (2D) izoparametrikus elemek alakfüggvényei.



A fiktív középfelület meghatározása:

$$\vec{r}_k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\left[\vec{r}_A(\xi,\eta)+\vec{r}_B(\xi,\eta)\right]$$

A középfelülethez kötött x',y',z' koordináta-rendszert ugyanúgy vesszük fel, mint az izoparametrikus héjelemnél.

A z' irány közelítőleg megegyezik az érintkezési normális irányával.

Az elmozdulásmező közelítése ugyanaz, mint a geometria közelítése:

$$\underline{\underline{u}}_A^e(\xi,\eta)=\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta)\underline{\underline{q}}_A^e, \qquad \underline{\underline{u}}_B^e(\xi,\eta)=\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta)\underline{\underline{q}}_B^e.$$

$$\underline{\underline{u}}_A^e(\xi,\eta)=\begin{bmatrix} u_A(\xi,\eta)\\ v_A(\xi,\eta)\\ w_A(\xi,\eta)\end{bmatrix}^e, \qquad \underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta,\zeta)=\left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & & h_N & 0 & 0\\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \cdots & 0 & h_N & 0\\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & & 0 & 0 & h_N\end{array}\right],$$

$$\left(\underline{\underline{q}}_A^e\right)^T=\left[u_1\ v_1\ w_1 \;\vdots\; u_2\ v_2\ w_2 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; u_N\ v_N\ w_N\right].$$

A felületek közötti relatív elmozdulás: $\Delta\underline{\underline{u}}(\xi,\eta)=\underline{\underline{u}}_B^e(\xi,\eta)-\underline{\underline{u}}_A^e(\xi,\eta)$,

$$\Delta\underset{(xyz)}{\underline{\underline{u}}}(\xi,\eta)=\left[-\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta)\quad \underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta)\right]\begin{bmatrix}\underline{\underline{q}}_A^e\\ \underline{\underline{q}}_B^e\end{bmatrix}=\underline{\underline{Q}}^e(\xi,\eta)\underline{\underline{q}}^e.$$

Transzformáció a középfelület koordináta-rendszerébe:

$$\Delta\underset{(x'y'z')}{\underline{\underline{u}}}(\xi,\eta)=\underline{\underline{T}}\,\Delta\underset{(xyz)}{\underline{\underline{u}}}(\xi,\eta) \qquad \underline{\underline{T}}=\begin{bmatrix}\cos(x'x) & \cos(y'x) & \cos(z'x)\\ \cos(x'y) & \cos(y'y) & \cos(z'y)\\ \cos(x'z) & \cos(y'z) & \cos(z'z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x}\\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y}\\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z}\end{bmatrix}.$$

Feltételezés:

- Az elemben fellépő belső erők érintkezés és tapadás esetén arányosak a felületek közötti relatív elmozdulásokkal.
- Ha nincs érintkezés, akkor az elemben nem lépnek fel belső erők.
- Ha a felületek érintkeznek és a felületek között relatív tangenciális elmozdulás van, akkor a tangenciális erőt a súrlódási törvény határozza meg.

Belső erők (a kontaktfelületen megoszló erőrendszer)

$$\underset{(x'y'z')}{\underline{\underline{S}}^e}(\xi,\eta)=\underline{\underline{\tilde{k}}}^e\,\Delta\underset{(x'y'z')}{\underline{\underline{u}}^e}(\xi,\eta) \qquad \underset{(x'y'z')}{\underline{\underline{S}}^e}(\xi,\eta)=\begin{bmatrix}S_1(\xi,\eta)\\ S_2(\xi,\eta)\\ S_3(\xi,\eta)\end{bmatrix}^e, \quad \underset{(x'y'z')}{\underline{\underline{u}}^e}(\xi,\eta)=\begin{bmatrix}u'(\xi,\eta)\\ v'(\xi,\eta)\\ w'(\xi,\eta)\end{bmatrix}^e$$

A kontaktmerevségek mátrixa:

$$\underline{\underline{\tilde{k}}}^e=\begin{bmatrix}k_1 & 0 & 0\\ 0 & k_2 & 0\\ 0 & 0 & k_3\end{bmatrix}^e$$

k_3^e - normál merevség,

k_1^e, k_2^e - tangenciális merevségek.

Izotróp felületi érdesség esetén: $k_1^e=k_2^e$

A kontaktelem merevségi mátrixa: $\int\limits_{(A^e)} \left(\Delta \underline{\underline{u}}^e\right)^T \underline{\underline{S}}^e dA = \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{K}}_c^e \underline{\underline{q}}^e$

$$\underline{\underline{K}}_c^e = \int\limits_{(A^e)} \left(\underline{\underline{Q}}^e\right)^T \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{\tilde{k}}}^e \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{Q}}^e dA.$$

A merevségi mátrix kiszámítása numerikus integrálással történik.

b) A normálkontakt iteráció:

Cél: Az érintkezési tartomány alakjának és a normál irányú felületi terhelés (kontaktnyomás) meghatározása.

Az iterációs lépések:

1. Indítás: a potenciális kontakt tartományon mindenhol érintkezés van: $k_{n0}^e = k_{30}^e$ nagy érték.
2. Ciklus kezdete a potenciális kontakt tartományon minden kontakt elemre.
3. Ha $p > 0,\ d > 0$, akkor a k_n^e-t csökkenteni kell.
4. Ha $p < 0$, akkor $k_n^e = 0$ beállítás.
5. Ha valamelyik kontaktelemen változtatni kell, akkor vissza kell térni a 2. lépésre.
6. Ellenőrizni kell a $k_n^e = 0$ kontakt elemeket, hogy van-e penetráció ($d < 0$, benyomódás, átfedés).
7. Ha van penetráció ($d < 0$), akkor $k_n^e = k_{n0}^e$ beállítás és visszatérés a 2. lépésre.
8. Ha rés ($d > 0$) van, akkor az iteráció befejeződött.

Az iterációt minden terhelési növekménynél meg kell ismételni!

c) A súrlódási iteráció:

Cél: A tényleges érintkezési tartományon a tapadási és a csúszási résztartomány nagyságának és alakjának, valamint a tangenciális irányú felületi terhelés meghatározása.

Az iterációs lépések:

1. Indítás: a tényleges kontakt tartományon mindenhol tapadás van: $k_{10}^e = k_{20}^e = k_{t0}^e$ nagy érték.
2. Ciklus kezdete a tényleges kontakt tartományon minden kontakt elemre.
3. Ha $\left|\vec{S}_t\right| > \mu S_n$, akkor $k_t^e = 0$ és $\left|\vec{S}_t\right| = \mu S_n$ beállítás (az $\vec{S}_t$ irányát a $\vec{u}_t$ relatív tangenciális elmozdulás iránya határozza meg).
4. Ha valamelyik kontaktelemen változtatni kell, akkor vissza kell térni a 2. lépésre.
5. Ellenőrizni kell a $k_t^e = 0$ kontaktelemeket, hogy $\left|\vec{S}_t\right| = \mu S_n$ fennáll-e.
6. Ha $\left|\vec{S}_t\right| < \mu S_n$, akkor $k_{10}^e = k_{20}^e = k_{t0}^e$ beállítása és vissza kell térni a 2. lépésre.
7. Ha a $\left|\vec{S}_t\right| = \mu S_n$ feltétel teljesül, akkor az iteráció befejeződött.

Ezt az iterációt is minden terhelési növekménynél meg kell ismételni!